Séq 7 – Parallélogrammes

Objectifs
1. Rappel sur la caractérisation angulaire du parallélisme (angles alternes-internes et angles correspondants) 2. Rappel de la définition d’un parallélogramme : Parallélisme des couples de côtés opposés 3. Dessiner un parallélogramme 4. Rappel des propriétés d’un parallélogramme : Intersection des diagonales. 5. Rappel des propriétés d’un parallélogramme : Même longueur des couples de côtés opposés 6. Connaître les propriétés relatives aux angles des parallélogrammes 7. Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme 8. Étude des parallélogrammes particuliers : losanges, rectangles, carrés

Ce cours est au format numérique sous :
http://ninoo.fr/LC/4e_Math/seq7_parall%c3%a9logrammes/7_parallelogrammes_particuliers_cours_eleves.pdf

☐

Cédric Villani (5/10/1973-)

Il est issu d'une famille d'universitaires et d'artistes. Sa famille paternelle est pied-noir et l'un de ses ancêtres a été maire d'Ajaccio.
Il est présenté en 2011 comme « surdoué dès son plus jeune âge », comme « pendant longtemps un garçon timide et réservé avant de devenir ce personnage curieux et philanthrope » et comme une personne « qui n'a jamais eu rien d'autre que des 20/20 en maths ».
Il obtient son bac avec 18 de moyenne générale.
Il intègre une classe préparatoire au lycée Louis-le-Grand de Paris et se classe 4e au concours d'entrée à l'École normale supérieure.
Régulièrement interrogé sur la possibilité d'avoir une forme d'autisme, Cédric Villani affirme ne pas savoir et ne pas ressentir le besoin de se faire diagnostiquer.

En 1994, il est reçu à l'agrégation de mathématiques. Il soutient sa thèse, « Contribution à l'étude mathématique des équations de Boltzmann et de Landau en théorie cinétique des gaz et des plasmas ». Ses travaux mathématiques portent en particulier sur l'étude des équations aux dérivées partielles.
En 2004, il est professeur au Miller Institute (Berkeley, en Californie), en 2009 à l'Institute for Advanced Study (Princeton, New Jersey). En 2010, il reçoit la médaille Fields.
Lors des élections législatives de 2017, il devient député de La République en marche (LREM). Il est ensuite battu en 2022.

☐

P. 216 activité 1 – A faire classe entière - Revoir :

- Comment est constitué un angle ?
- Angles adjacents, angles opposés, alternes-internes, correspondants, supplémentaires, complémentaires.

I. Rappel : Vocabulaire relatif aux angles

Vidéos :

- les angles : https://www.youtube.com/watch?v=3hn4VCXzYLw
- angles alternes-internes : https://www.youtube.com/watch?v=v7XmtQhOP9I
- angles correspondants : https://www.youtube.com/watch?v=ErUq2wdA_PE

A. Des angles sont adjacents si:

- ils ont un sommet commun,
- ils ont un coté commun,
- ils sont de part et d'autre de ce coté commun.

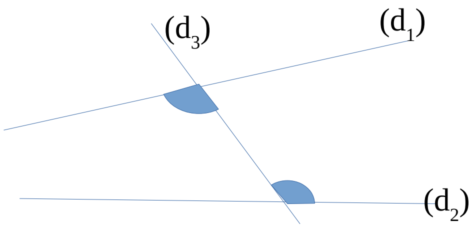
B. Des angles sont opposés par le sommet si :

- ils ont un sommet commun.
- ils on des cotés dans leurs prolongements.

C. Angles alternes-internes :

Deux angles formés par deux droites (d_1) et (d_2) coupés par une sécante (d_3) sont alternes-internes lorsqu'ils sont situés :

- de part et d'autre de la sécante (d_3) ,
- entre les droites (d_1) et (d_2) .

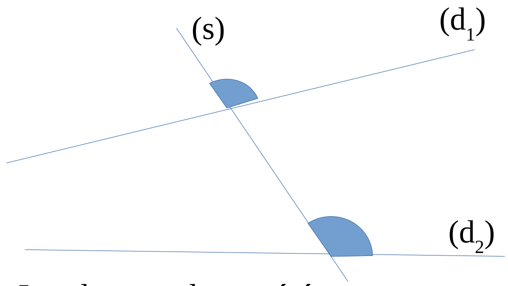


Les deux angles repérés sont alternes internes

D. Angles correspondants :

Deux angles formés par deux droites (d_1) et (d_2) coupés par une sécante (s) sont correspondants lorsqu'ils sont situés :

- du même coté de la droite (s),
- l'un est formé par (d1) et (s) et l'autre par (d2) et (s)
- l'un entre les droites (d1) et (d2) et l'autre pas.



Les deux angles repérés sont correspondants

E. Angles supplémentaires :

Des angles sont supplémentaires, si la somme de leurs mesure est égale à 180°.

F. Angles complémentaires :

Des angles sont complémentaires si la somme de leurs mesure est égale à 90°.

II. Rappel : Propriétés concernant les angles

- Deux angles opposés par le sommet sont de même mesure.
- Si deux angles alternes-internes sont formés par deux droites parallèles alors ils ont

même mesure.

Réciproquement :

- Si deux angles alternes-internes ont même mesure, alors les droites qui les forment sont parallèles.

- Si deux angles correspondants sont formés par deux droites parallèles alors, ils ont la même mesure.

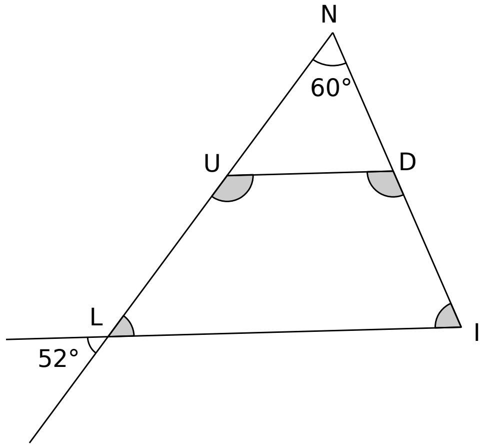
Réciproquement :

- Si deux angles correspondants ont même mesure, alors les droites qui les forment sont parallèles.

☐

A. *Exemple 1*

Sachant que les droites (DU) et (IL) sont parallèles, calcule la mesure de chacun des angles du quadrilatère LUDI en justifiant.



<u>Mesure de $\widehat{ULI}$:</u>

On sait que l'angle opposé par le sommet à $\widehat{ULI}$ mesure 52°, donc $\widehat{ULI}=52°$

<u>Mesure de $\widehat{NIL}$:</u>

La somme des angles du triangle NIL est de 180° donc $\widehat{NIL}=180-(60+52)=68°$.

<u>Mesure de $\widehat{NDU}$:</u>

$\widehat{NDU}$ et $\widehat{DIL}$ sont correspondants définis par les droites parallèles (DU) et (IL) donc $\widehat{NDU}=\widehat{DIL}=68°$.

<u>Mesure de $\widehat{IDU}$:</u>

$\widehat{IDU}$ et $\widehat{NDU}$ sont supplémentaires donc $\widehat{IDU}=180-68=112°$.

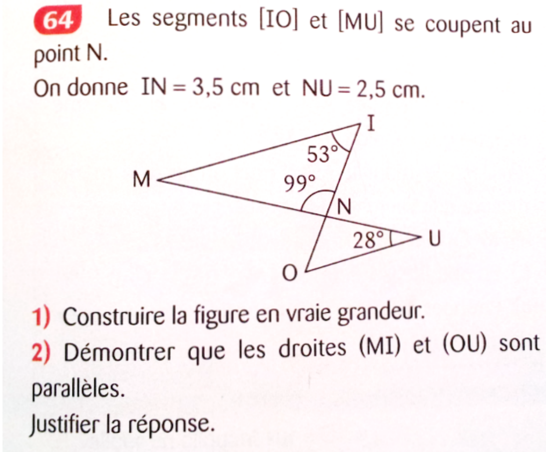
<u>Mesure de $\widehat{NUD}$:</u>

$\widehat{NUD}$ et $\widehat{ULI}$ sont correspondants définis par les droites parallèles (DU) et (IL) et la sécante (LN) donc $\widehat{NUD}=\widehat{ULI}=52°$.

<u>Mesure de $\widehat{LUD}$:</u>

$\widehat{LUD}$ et $\widehat{NUD}$ sont supplémentaires donc $\widehat{LUD}=180-52=128°$.

B. *Exemple 2*


64 Les segments [IO] et [MU] se coupent au point N.
On donne IN = 3,5 cm et NU = 2,5 cm.

1) Construire la figure en vraie grandeur.
2) Démontrer que les droites (MI) et (OU) sont parallèles.
Justifier la réponse.

<u>*1)* Mesure de l'angle $\widehat{IMN}$:</u>

Dans un triangle, la somme des mesures des angles est toujours égale à 180°.

Donc, dans le triangle MIN :

$$\begin{aligned}\widehat{IMN} &= 180° - \widehat{MIN} - \widehat{INM}\\ &= 180° - 53° - 99°\\ &= 28°\end{aligned}$$

<u>2) Montrons que (MI) et (OU) sont parallèles :</u>

Les angles $\widehat{IMN}$ et $\widehat{NUO}$ sont alternes-internes pour les droites (MI) et (OU) coupées par la sécante (MU). **De plus**, ces angles sont de la même mesure.

Or si des angles alternes-internes sont de même mesure, alors les droites qui les forme sont parallèles.

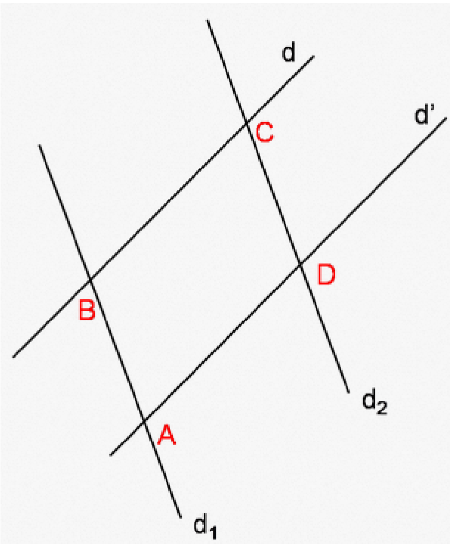
Donc les droites (MI) et (OU) sont parallèles.

P. 220 ex 2

P. 220 ex 5

III. Les parallélogrammes

A. Définition



(d) et (d') sont deux droites parallèles.
(d1) et (d2) sont aussi deux droites parallèles.
A, B, C et D sont les points d'intersection déterminés par ces quatre droites.

Le quadrilatère ABCD est appelé parallélogramme

Définition :
Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles.

Banque exercices n° 1

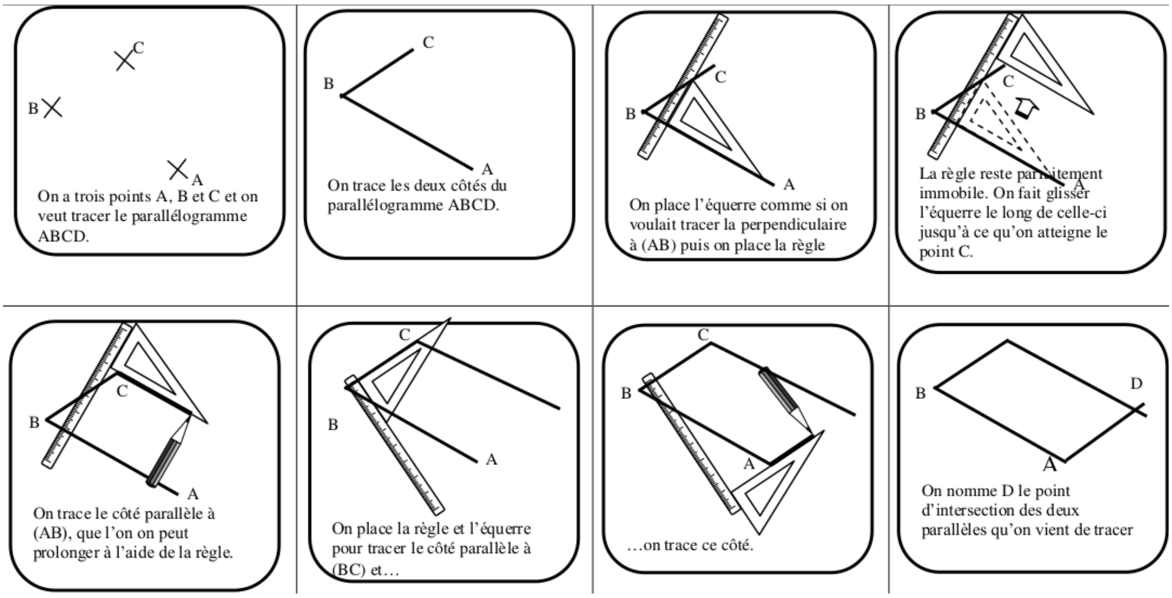
Banque exercices n° 2

B. Construction d'un parallélogramme

i. Cotés parallèles deux à deux

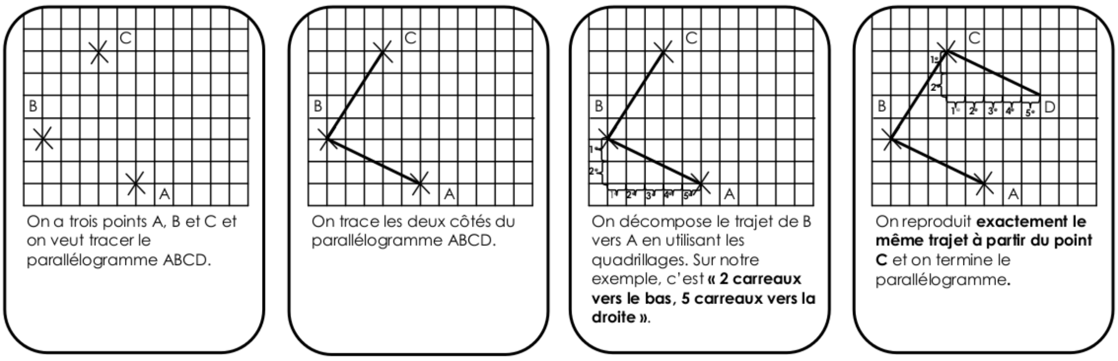
Vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=lhBapOhb7m4

Construction d'un parallélogramme à l'aide d'une règle et d'une équerre :



Banque exercices n° 3

Construction d'un parallélogramme à l'aide du quadrillage :

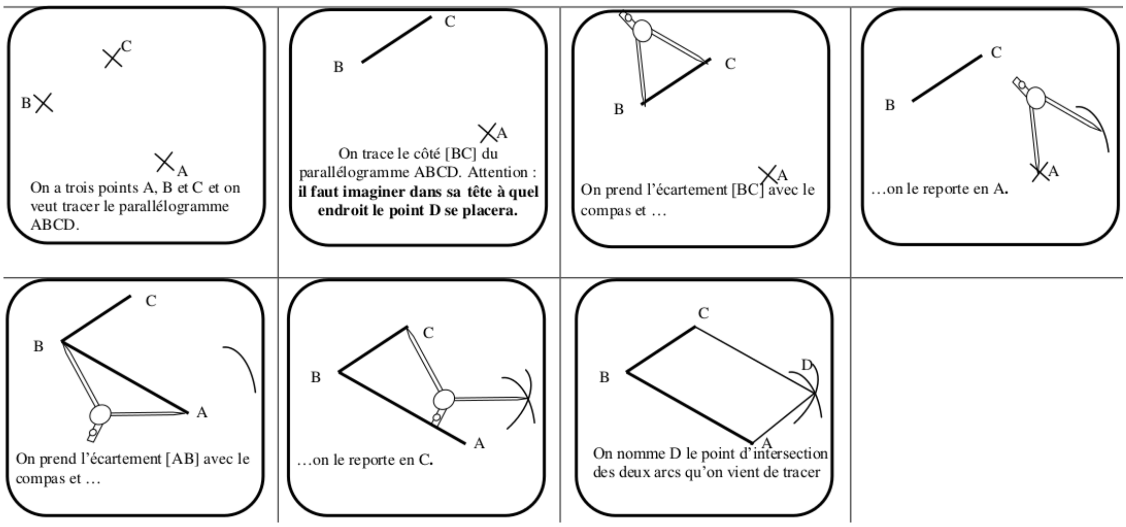


Banque exercices n° 4

ii. Côtés de même longueur

Vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=BMEBEpdlVAw

Construction d'un parallélogramme à l'aide du compas :

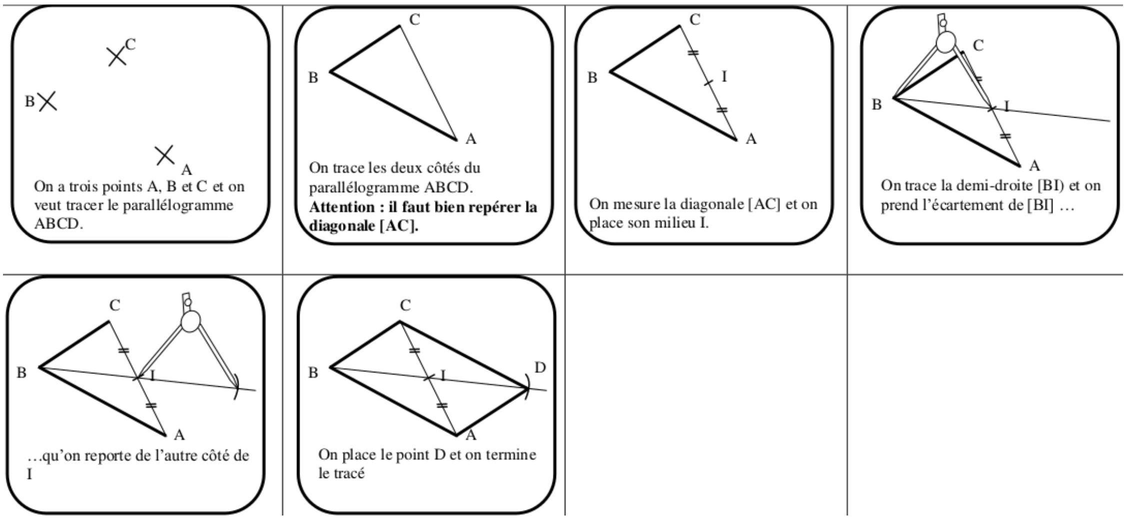


Banque exercices n° 5

iii. Diagonales qui se coupent en leur milieu

Vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=UHreCqzqgpo

Construire un parallélogramme en utilisant la symétrie centrale :

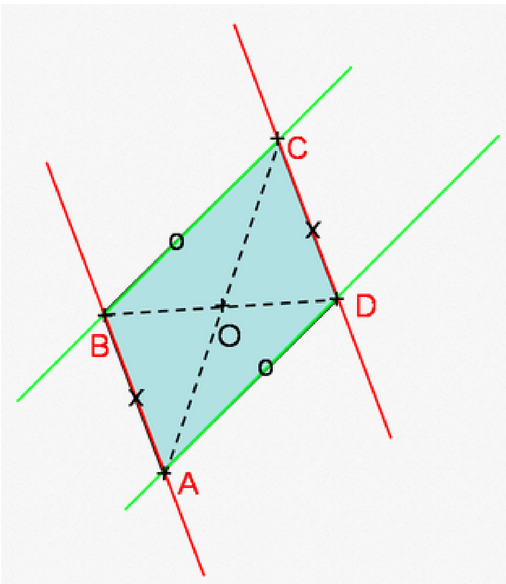


Banque exercices n° 6

C. Propriétés des parallélogrammes

i. Parallélogrammes-Côtés opposés égaux

Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors les côtés opposés sont parallèles et ont la même longueur.



Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Les droites (BC) et (AD) sont parallèles.
C'est un parallélogramme.

Le point C est le symétrique du point A par rapport au point O
D est le symétrique de B par rapport à O.

La segment [AB] a donc pour symétrique la segment [CD].
La segment [BC] a donc pour symétrique la segment [DA].

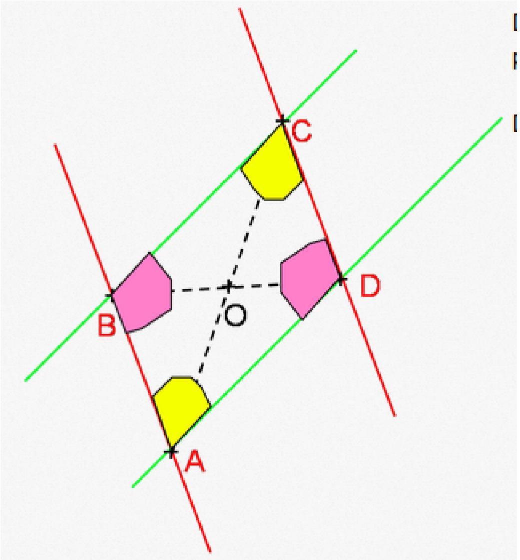
On a donc les égalités suivantes :

$$AB = CD \text{ et } AD = BC$$

Banque exercices n° 8

ii. Parallélogrammes-Angles opposés égaux

Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors les angles opposés sont de même mesure.



Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Les droites (BC) et (AD) sont parallèles.
C'est un parallélogramme.
Le point C est le symétrique du point A par rapport au point O
D est le symétrique de B par rapport à O.

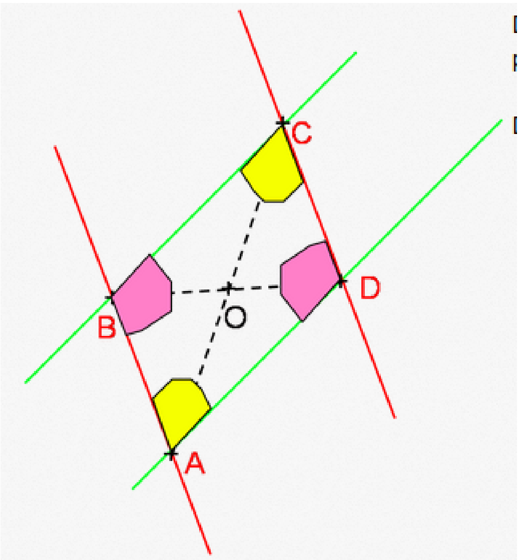
L'angle $\widehat{BAD}$ a donc pour symétrique l'angle $\widehat{DCB}$.
L'angle $\widehat{ABC}$ a donc pour symétrique l'angle . $\widehat{CDA}$
On a donc les égalités suivantes : $\widehat{BAD}=\widehat{DCB}$

et

$\widehat{ABC}=\widehat{CDA}$

iii. Parallélogrammes-Somme des angles consécutifs égale à 180° ☐

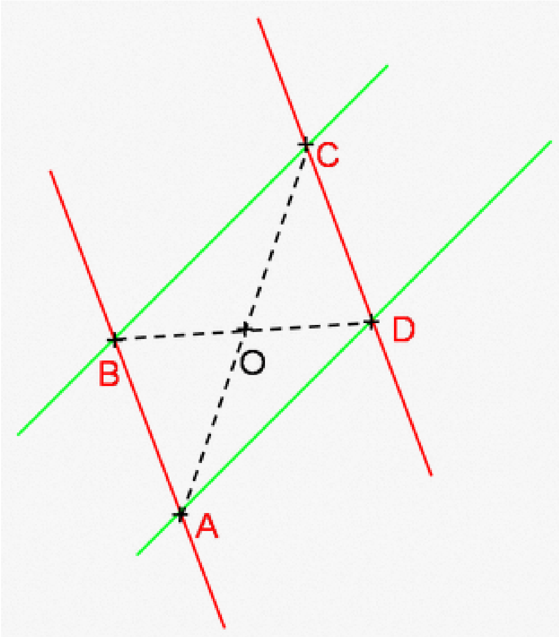
Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors la somme des angles consécutifs est égale à 180°



$$\widehat{BAD}+\widehat{ABC}=180\,°$$

iv. centre de symétrie ☐

Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors le point d'intersection des diagonales est son centre de symétrie.



Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Les droites (BC) et (AD) sont parallèles.
Donc c'est un parallélogramme.

Le point C est donc le symétrique du point A par rapport au point O.
D est donc le symétrique de B par rapport à O.

La droite (AB) a donc pour symétrique la droite (CD).
La droite (BC) a donc pour symétrique la droite (DA).

Banque exercices n° 7 ☐

D. Comment démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme ? ☐

- **Diagonales**
  Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.
- **Deux côtés opposés parallèles et égaux**
  Si un quadrilatère a deux de ses côtés opposés parallèles ET de même longueur, alors c'est un parallélogramme.
- **Côtés opposés égaux deux à deux**
  Si un quadrilatère a ses côtés opposés de même longueur deux à deux, alors c'est un parallélogramme.
- **Angles opposés égaux deux à deux**
  Si un quadrilatère a ses angles opposés égaux deux à deux, alors c'est un parallélogramme.

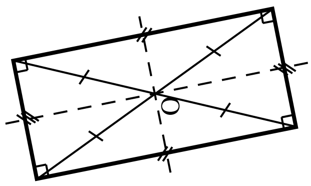
Banque exercices n° 9 ☐

Banque exercices n° 10 ☐

IV. Les parallélogrammes particuliers : ☐

A. Rectangle :

Définition : Un rectangle est un quadrilatère qui a trois angles droits.



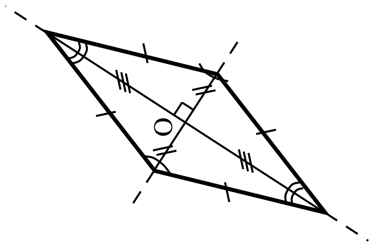
Propriétés :

- Si un quadrilatère est un rectangle alors il a quatre angles droits.
- Si un quadrilatère est un rectangle alors c’est un parallélogramme (il en possède donc toutes les propriétés).

- Si un quadrilatère est un rectangle alors ses diagonales sont de même longueur.
- Si un quadrilatère est un rectangle alors les médiatrices de ces cotés sont ses axes de symétrie.

B. Losange :

Définition : Un losange est un quadrilatère qui a ses côtés de même longueur.



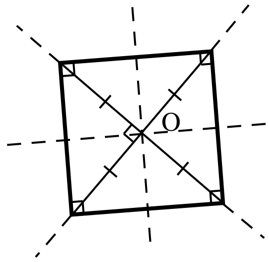
Propriétés :

- Si un quadrilatère est un losange alors il a quatre côtés de même longueur.
- Si un quadrilatère est un losange alors c'est un parallélogramme (il en possède donc toutes les propriétés).
- Si un quadrilatère est un losange alors ses deux diagonales sont perpendiculaires.
- Si un quadrilatère est un losange alors ses deux diagonales sont ses axes de symétrie.

C. Carré :

Définition : Un carré est un quadrilatère qui est à la fois un rectangle et un losange.

Propriété :



Si un quadrilatère est un carré alors il possède toutes les propriétés d'un rectangle et d'un losange (et donc d'un parallélogramme).

V. Démontrer qu'un parallélogramme est particulier

A. RECTANGLE :

Propriétés : (en partant d'un quadrilatère)

- Si un quadrilatère a trois angles droits (au moins) alors c'est un rectangle.
- Si un quadrilatère a des diagonales de même longueur et qui se coupent en leur milieu alors c'est un rectangle.

Propriétés : (en partant d'un parallélogramme)

- Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle.
- Si un parallélogramme a des diagonales de même longueur alors c'est un rectangle.

B. LOSANGE :

Propriétés : (en partant d'un quadrilatère)

- Si un quadrilatère a quatre côtés de même longueur alors c'est un losange.
- Si un quadrilatère a des diagonales qui se coupent perpendiculairement et en leur milieu alors c'est un losange.

Propriétés : (en partant d'un parallélogramme)

- Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un losange.
- Si un parallélogramme a des diagonales perpendiculaires alors c'est un losange.

C. CARRE :

☐

Propriétés : (en partant d'un quadrilatère)

- Si un quadrilatère a trois angles droits (au moins) et deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un carré.
- Si un quadrilatère a trois angles droits (au moins) et des diagonales perpendiculaires alors c'est un carré.
- Si un quadrilatère a des diagonales de même longueur et qui se coupent en leur milieu et deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un carré.
- Si un quadrilatère a des diagonales de même longueur et qui se coupent en leur milieu et perpendiculaires alors c'est un carré.

Propriétés : (en partant d'un parallélogramme)

- Si un parallélogramme a un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un carré.
- Si un parallélogramme a un angle droit et des diagonales perpendiculaires alors c'est un carré.
- Si un parallélogramme a des diagonales de même longueur et deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un carré.
- Si un parallélogramme a des diagonales de même longueur et perpendiculaires alors c'est un carré.

Propriétés : (en partant d'un rectangle)

- Si un rectangle a deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un carré.
- Si un rectangle a des diagonales perpendiculaires alors c'est un carré.

Propriétés : (en partant d'un losange)

- Si un losange a un angle droit alors c'est un carré.
- Si un losange a des diagonales de même longueur alors c'est un carré.

Si un quadrilatère est à la fois un rectangle et un losange alors c'est un carré.

Banque exercices n° 12	☐
Banque exercices n° 13	☐
Banque exercices n° 14	☐
Banque exercices n° 15	☐
Banque exercices n° 16	☐